पूर्णांकों के अधिगम को सुदृढ़ करना | एक प्रक्रिया

राहुल सिंह राठौड़

मैंने तय किया कि कक्षा-7 के विद्यार्थियों के साथ संख्याओं पर काम शुरू करने से पहले उनके साथ पूर्व में किए गए काम की समीक्षा करूँ। विद्यार्थियों को संख्या समूहों की परिभाषाएँ समझाते हुए प्राकृत और पूर्ण संख्याओं और पूर्णांकों के समूह बनाने के तरीक़े और ऐसा करने की आवश्यकता पर कक्षा में चर्चा की गई थीं। पूर्णांकों का उपयोग हानि, ऋण और घाटे सम्बन्धी स्थितियों में किया जाता है, इसलिए पूर्णांकों के जोड़ और शेषफल सम्बन्धी संक्रियाओं का उपयोग करते हुए इनका अभ्यास किया गया था।

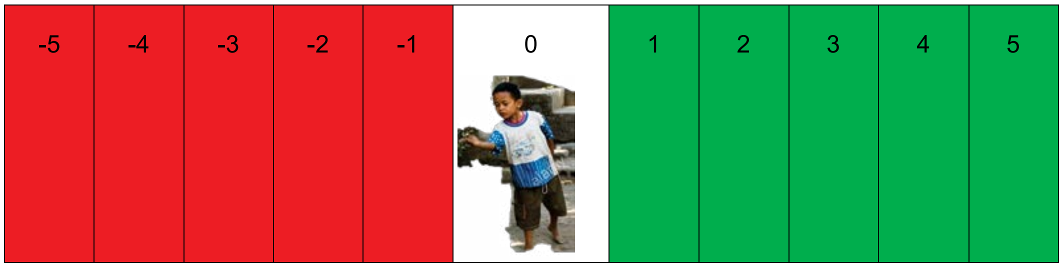
कार्य के दौरान आई समस्याएँ :

- विद्यार्थियों से प्राकृत, पूर्ण और पूर्णांक संख्या समूहों के सन्दर्भ में उनकी समझ के बारे में पूछा गया। उनके अनुसार प्रकृति में जो कुछ भी खोजा जाता है वह प्राकृतिक है; यदि इस समूह में 0 जोड़ दें तो यह एक पूर्ण संख्या बन जाती है। इसी तरह उनके अनुसार ऋणात्मक संख्याओं समेत पूर्णांक, उन संख्याओं के उदाहरण हैं जो प्राकृत संख्या नहीं हैं। विद्यार्थियों ने इसमें प्राकृत संख्याओं को शामिल नहीं किया। वे संख्या समूहों को प्राकृतिक रूप से विद्यमान और मानव निर्मित, दोनों अवधारणाओं से जोड़कर देख रहे थे। वास्तव में संख्याओं का अस्तित्व संख्या रेखा पर ही दिखता है। सभी संख्याएँ अमूर्त होती हैं, चाहे वे प्राकृत संख्याएँ हों या संख्याओं का कोई अन्य समूह।
- कुछ विद्यार्थियों को यह दिक़्क़त थी कि वे 0 को मात्र एक पूर्ण संख्या के रूप में सोच पा रहे थे और उसे एक पूर्णांक संख्या समूह का हिस्सा नहीं मान पा रहे थे। और कुछ विद्यार्थी 2 को मात्र एक प्राकृत संख्या के रूप में सोच पा रहे थे। वे पूर्णांकों को प्रायः ऋणात्मक संख्याओं के रूप में समझ रहे थे। अतः उनके साथ, संख्या-समूह पदानुक्रम को स्पष्ट करने की आवश्यकता थी।
- बुनियादी जोड़ और घटाव करने के लिए विद्यार्थी पहले से सीखी गई पूर्णांक संक्रियाओं वाली अवधारणाओं का उपयोग कर सकते थे। अधिकांश विद्यार्थियों ने 18-4, 18-(-4), -18-4, -18-(-4) जैसे दोनों तरफ़ कोष्ठक वाले सीधे कथनों का हल खोजने में उधार लेने के सन्दर्भ में ग़लती की। इन चार कथनों में से प्रत्येक में उधार लेने के सन्दर्भ को बदलने की ज़रूरत होती है।

उपरोक्त उदाहरणों को देखते हुए लगता है कि विद्यार्थियों को संक्रियाओं को हल करने के नियमों को स्वयं सीखने के अवसर उपलब्ध नहीं होने से, उन्होंने इन्हें याद कर लिया था और उनका ग़लत तरीक़े से उपयोग कर रहे थे। निम्नलिखित बातों पर विचार करने के बाद मुझे विद्यार्थियों के साथ अतिरिक्त गतिविधियों की आवश्यकता महसूस हुई :

- सब जानते हैं कि (-) और (-) का गुणा करने पर (+) हो जाता है। ऐसे में संख्या रेखा में हेर-फेर करके, पैटर्न पहचानकर और घटाव चिह्न और ऋणात्मक (नेगेटिव) चिह्न पर विशेष ध्यान देकर नियम बनाने का अभ्यास करने की आवश्यकता थी।
- विद्यार्थियों को परेशानी हो रही थी, क्योंकि वे समस्या को हल करने के लिए संख्या रेखा को देखने और संख्या रेखा का उपयोग करने के कौशल का उपयोग करने की बजाय समस्या को लाभ और हानि के सन्दर्भ में समझकर हल कर रहे थे।
- विद्यार्थी प्रतिक्रिया देने में जल्दबाज़ी कर रहे थे। ऐसे कुछ उदाहरण थे जहाँ अगर उन्होंने सोचने, विचार-विमर्श करने और बातचीत में शामिल होने के लिए कुछ समय लिया होता, तो वे सही ढंग से आगे बढ़ पाते।
- विद्यार्थियों द्वारा भी प्रश्न बनाए गए थे। लेकिन ये उन समस्याओं के समान थे जिनके उत्तर पहले ही दिए जा चुके थे, जैसे 9-4, -9-4, 9-(-4), -9-(-4)।
- उच्च प्राथमिक कक्षाओं में विद्यार्थियों को क्या पढ़ाया जाएगा, इस सन्दर्भ पर काफ़ी विचार किया जाना चाहिए। इस सन्दर्भ से उनकी भविष्य की शिक्षा बाधित न हो, इसे सुनिश्चित किया जाना अतिआवश्यक है। हमें यह भी ध्यान में रखना चाहिए कि इसका अमूर्तिकरण की प्रक्रिया पर क्या प्रभाव पड़ेगा, यह इसे तेज़ करेगा या धीमा।
- विद्यार्थियों के साथ काम करते समय, पैटर्न प्रदर्शित करके सामान्यीकरण से नियमों की ओर आगे बढ़ना चाहिए। यह तो स्वीकार्य है कि विद्यार्थी स्वयं अपने प्रश्न तैयार करें, लेकिन यह महत्त्वपूर्ण है कि विद्यार्थी उनके द्वारा बनाए गए प्रश्न में निहित तर्क को भी समझें।
- विद्यार्थी अक्सर हॉप्सकॉच का खेल खेलते हैं। क्या इस खेल में संख्या रेखा पर घर बनाकर पूर्णांक संक्रियाओं के अभ्यास का काम किया जा सकता है?

पूर्णांक खेल



खेल के नियम :

1. हमें शून्य से शुरुआत करनी है, इसलिए हमें शून्य पर ही खड़ा रहना होगा।
2. खिलाड़ी को शून्य पर खड़े रहकर पत्थर को उछालना होगा, लेकिन शुरुआत ऋणात्मक संख्याओं से करनी होगी।
3. पत्थर को पहले -1 पर फेंका जाना होगा, फिर शून्य पर लौटाना होगा और फिर रिकॉर्ड करना होगा। यदि पत्थर शून्य तक नहीं पहुँचता है, तो टीम के खिलाड़ी को बाहर कर दिया जाएगा।
4. खिलाड़ियों को उनके द्वारा चली गई हर चाल को गणितीय रूप से रिकॉर्ड करना होगा।
5. 0 से दाईं ओर जाने पर + का चिह्न लगाना है और 0 से बाईं ओर जाने पर - का चिह्न लगाना है।

उदाहरण : राजू खेल रहा है और साथ ही नीचे दी गई तालिका भी भर रहा है।

चरण-1 : राजू शून्य पर खड़ा है। वह पत्थर को -4 पर फेंकता है। उसकी वर्तमान स्थिति 0-4=-4 है।



विद्यार्थी का नाम :	**स्थिति-1**		**स्थिति**
	पत्थर फेंकने पर स्थिति	**पत्थर को लाने का प्रयास**	**खेल से बाहर या दूसरा मौक़ा**
राजू	0-4 = -4	-4+2= -2	खेल से बाहर क्योंकि शून्य पर लौटकर नहीं आया
रश्मि	0-2 = -2	-2-3 = -5	खेल से बाहर क्योंकि शून्य पर लौटकर नहीं आई
अनवर	0-2 = -2	-2-(-3) = 1	खेल से बाहर क्योंकि शून्य पर लौटकर नहीं आया

चरण-2 : राजू अब स्थिति -4 पर जाता है और अपने पैर से पत्थर को ठोकर मारता है, जिससे वह दो स्थान आगे बढ़कर स्थिति -2 पर पहुँच जाता है। इसका गणितीय निरूपण इस प्रकार होगा : -4 + 2 = -2

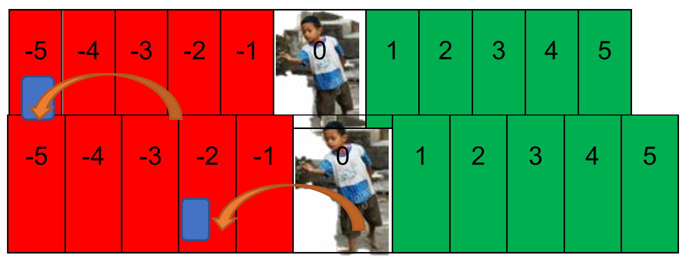


इसके बाद रश्मि की बारी आई और उसने निम्नलिखित चालें चली :

चरण-1 : रश्मि शून्य पर खड़ी है। वह पत्थर को -2 पर फेंकती है, इसलिए उसकी चाल का गणितीय रूप 0-2 = -2 होगा।

चरण-2 : रश्मि द्वारा स्थिति -2 पर जाकर पत्थर को पैर से ठोकर मारने के बाद, पत्थर अब तीन स्थिति पीछे या बाईं ओर -5 स्थिति पर आगे बढ़ता है। इसे गणितीय रूप से इस प्रकार लिखा जाएगा :

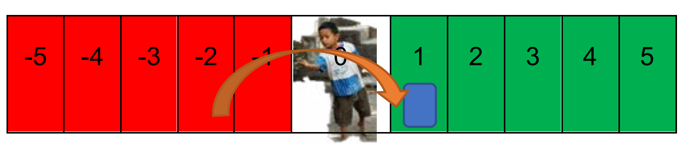
-2 -3 = -5



जब अनवर को मौक़ा मिला तो उसने इस प्रकार खेला :

चरण-1 : अनवर शून्य पर खड़े होकर पत्थर को -2 पर उछालता है, इसलिए उसकी इस चाल का गणितीय रूप होगा, 0-2 = -2

चरण-2 : अब, जब अनवर -2 पर पहुँचता है और पत्थर को ठोकर मारता है, तो वह तीन स्थान आगे बढ़ जाता है या स्थित 1 पर पहुँच जाता है।



अनवर इसे इस प्रकार लिखता है : -2-(-3) =1

उसने ऐसा इसलिए लिखा क्योंकि -3 मिलने पर जब रश्मि बाईं ओर गई तो इसका विपरीत -(-3) भी हो सकता है।

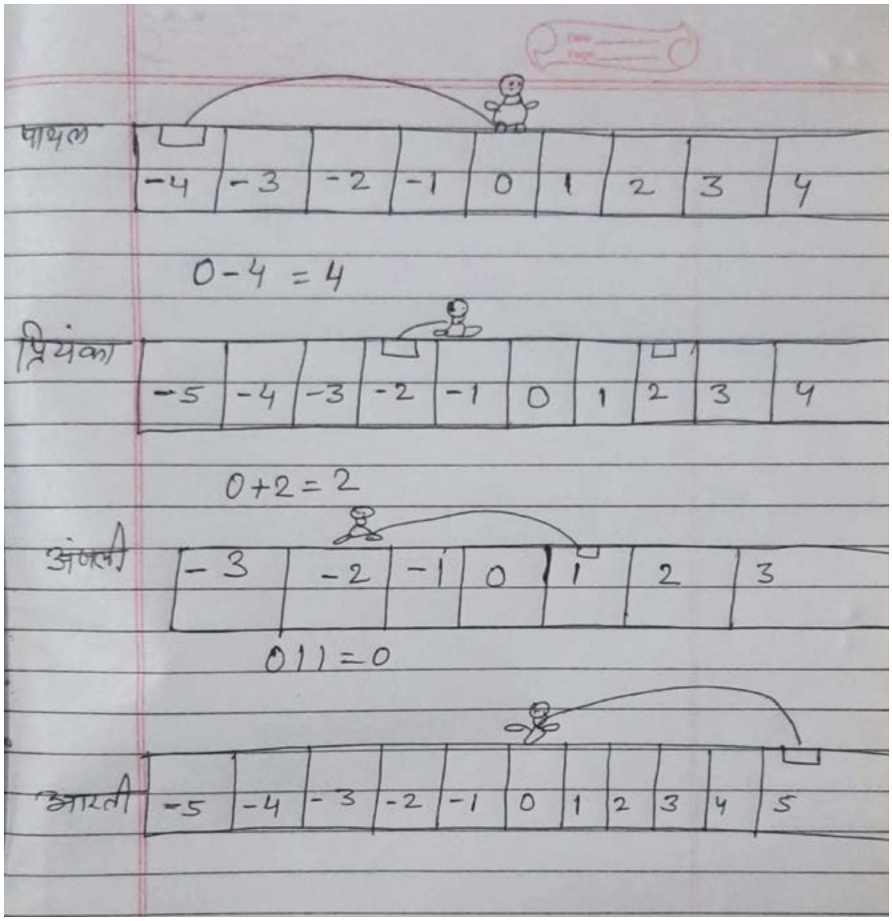
इसी तरह आप एक टेबल बना सकते हैं, और यह खेल खेल सकते हैं। इस खेल में दूसरों को इसमें शामिल कर सकते हैं।

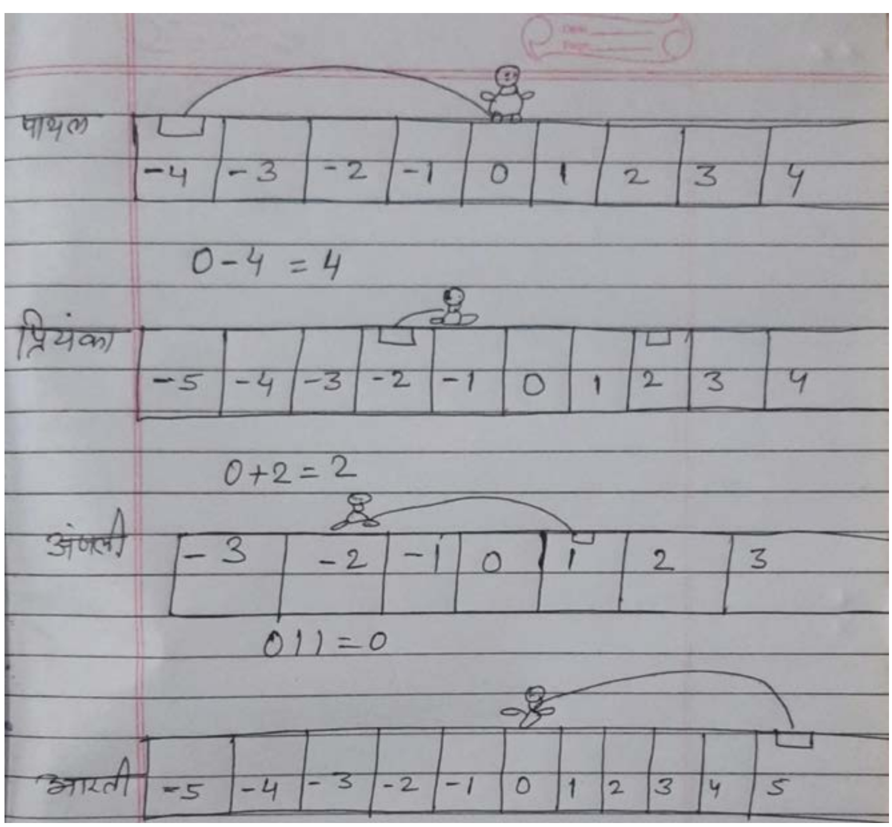
चित्र-1 *: पूर्णांक खेल, जैसा कि यह कक्षा में खेला गया था।*

खेल की वर्कशीट

हर विद्यार्थी घर पर संख्या-रेखा खेल खेलने में सक्षम नहीं था। अलबत्ता, यह स्पष्ट था कि जो सक्षम थे, वे यह समझ पा रहे थे कि संख्याएँ 0 के दोनों ओर थीं। दूसरे, यह भी स्पष्ट था कि विद्यार्थी घटते और बढ़ते क्रम को समझ सकते थे। लेकिन उन्हें यह समझने में मदद करने के लिए और अधिक काम करने की आवश्यकता थी कि एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु पर जाने के दौरान गणितीय रूप से क्या घटित हो रहा था।

कक्षा में यह खेल जोड़ियों में खेला गया था। एक विद्यार्थी को गणितीय निरूपण लिखने के लिए कहा गया, जबकि दूसरे (उनके साथी) को इसे खेलने का काम दिया गया।





चित्र-2 और 3 *: इस तरह विद्यार्थी काग़ज़ पर उस खेल का प्रतिनिधित्व कर रहे थे जो उनके साथी खेल रहे थे।*

अन्य सभी विद्यार्थियों को इन दोनों प्रक्रियाओं को देखने और अपनी बारी के लिए तैयार होने का निर्देश दिया गया। निम्नलिखित वजहों से विद्यार्थी भ्रमित हो रहे थे और ग़लतियाँ कर रहे थे :

1. वे जहाँ खड़े थे उसका स्थान पहले संकेतों का उपयोग करके लिखना था। (इसके लिए उन्हें पहली बार 0 पर और दूसरी बार अलग घर से शुरुआत करने का मौक़ा दिया गया था।)
2. इस बात को इंगित करने के लिए उपयुक्त संकेतों का उपयोग आवश्यक है कि पत्थर को बढ़ते (आरोही) क्रम की दिशा में ले जाना है या घटते (अवरोही) क्रम की दिशा में। (आरोही क्रम के लिए + चिह्न का उपयोग करें, अवरोही क्रम के लिए - चिह्न का उपयोग करें।)
3. उन्हें अपने द्वारा लाँघे गए घरों की संख्या का कुल मान समझना था : इसके लिए वे जिस भी दिशा में जाएँ, उन्हें घरों की संख्या गिननी होती थी।
4. अन्ततः संख्या रेखा पर अपनी स्थिति बताना ही सही उत्तर होगा।

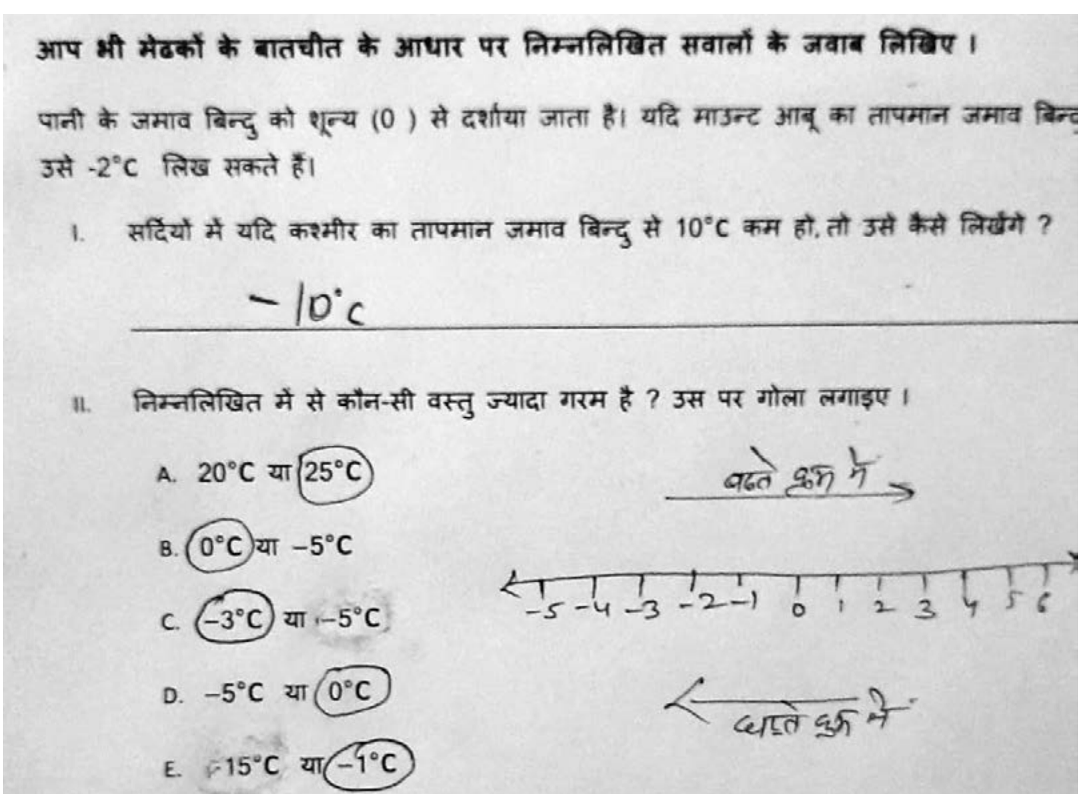
दरअसल, विद्यार्थियों ने ही इन चार चरणों का सुझाव दिया था। शुरुआत में, यदि उनके द्वारा किए जा रहे सवालों का हल पहचान लिया जाता, तो उन्हें फिर से प्रयास करने का मौक़ा दिया जाता था। तो लगभग 45 मिनट के अभ्यास के बाद, खेल की इस समझ को ध्यान में रखते हुए, ब्लैकबोर्ड पर संख्या रेखा का उपयोग करके कई जोड़ और घटाव के अभ्यास किए गए।

प्रक्रिया के दौरान, हमने देखा कि कुछ विद्यार्थियों का ध्यान संख्या रेखा पर -3 +5 की गणना करने से हटकर दोनों संख्याओं को अलग-अलग देखकर संख्या रेखा पर पूर्णांकों को हल करने पर केन्द्रित हो गया। इसकी बजाय, ध्यान इस बात पर होना चाहिए था कि -3 से 5 तक आने में क्या प्रक्रिया घटित हो रही है। इसलिए, मैंने संख्या रेखा पर पूर्णांक हटा दिए और विद्यार्थियों को केवल 0 से चिह्नित संख्या रेखा पर अभ्यास कराया।

कक्षा के अधिकांश बच्चे संख्या रेखा का उपयोग करके इन सरल समीकरणों को समझ पाए। इसके बाद पूर्णांकों की वर्कशीट समझाई गई और विद्यार्थियों से उसे स्वयं हल करने को कहा गया।

विद्यार्थियों द्वारा पूर्ण किए काम का एक उदाहरण यहाँ दिया गया है।

वर्कशीट से पता चलता है कि विद्यार्थी पूर्ण संख्याओं की तुलना तो सही-सही कर लेते थे लेकिन जब उन्हें ऋणात्मक संख्या नज़र आती, तो वे भ्रमित हो जाते थे। मैं समझ गया कि विद्यार्थी मात्र संख्याओं पर ध्यान दे रहे हैं। इसलिए उनका


आप भी मेढकों के बातचीत के आधार पर निम्नलिखित सवालों के जवाब लिखिए।

पानी के जमाव बिन्दु को शून्य (0) से दर्शाया जाता है। यदि माउन्ट आबू का तापमान जमाव बिन्दु
उसे -2°C लिख सकते हैं।

I. सर्दियों में यदि कश्मीर का तापमान जमाव बिन्दु से 10°C कम हो, तो उसे कैसे लिखेंगे ?

–10°C

II. निम्नलिखित में से कौन-सी वस्तु ज्यादा गरम है ? उस पर गोला लगाइए।

A. 20°C या 25°C
B. 0°C या –5°C
C. –3°C या –5°C
D. –5°C या 0°C
E. –15°C या –1°C

चित्र-4 : जब बच्चों को तुलना की समस्याएँ दी गईं, तो वे कुछ समस्याओं को सही ढंग से हल करने में सक्षम थे। लेकिन वे इन्हें संख्या रेखा पर देखने में सक्षम नहीं थे।

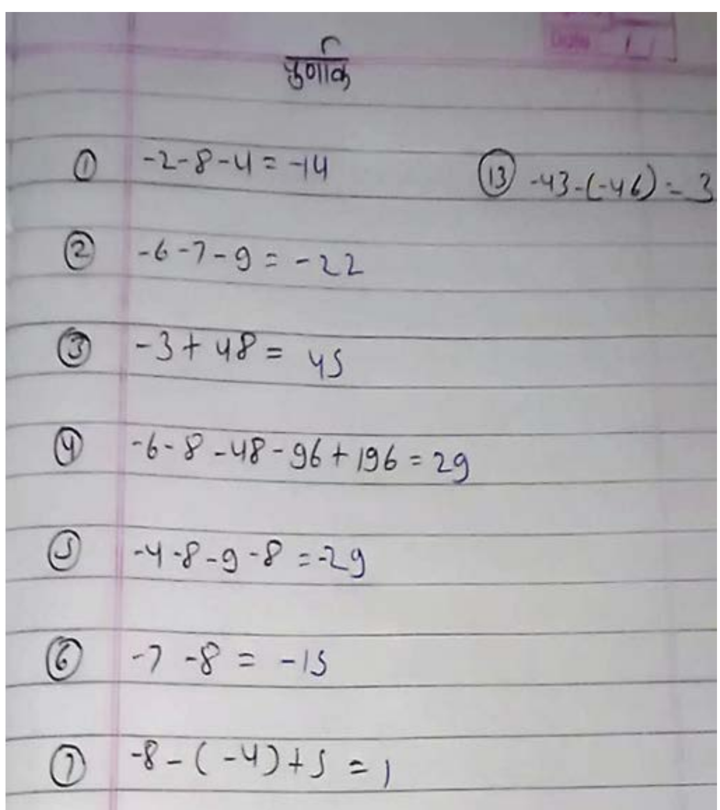
ध्यान एक बार फिर संख्या रेखा पर दिलाया गया तथा और अभ्यास किया गया ताकि वे यह समझ सकें कि जब हम किसी संख्या की मूल स्थिति से दाईं ओर बढ़ते हैं तो उसका मान बढ़ता है जबकि बाईं ओर बढ़ने पर मान घटता है।

इसके बाद, विद्यार्थियों ने अपने के काम की जाँच स्वयं की और उसे दुरुस्त करने का प्रयास किया। उन्होंने आपस में बहुत विचार-विमर्श किया; बोर्ड के पास इकट्ठे हुए और निर्णय लिया कि कौन-सी संख्या बड़ी होगी और कौन-सी संख्या छोटी होगी। वे इस निष्कर्ष पर पहुँचे कि यदि कोई संख्या, संख्या रेखा के दाईं ओर है, तो वह बड़ी होगी और यदि वह बाईं ओर है, तो वह छोटी होगी।

दो विद्यार्थी इस बात पर चर्चा करने लगे, कि जब भी उन्हें ऐसी गणितीय गणना करनी होगी तो वे हर बार संख्या रेखा नहीं खींचेंगे। इसलिए, उन्होंने अनुरोध किया कि कुछ अतिरिक्त कार्य करवाया जाए जो संख्या रेखा के उपयोग के बिना किया जा सकता था। सभी इस बात से सहमत थे।



चित्र-5 : विद्यार्थी बोर्ड पर संख्या रेखा खींचकर समस्याएँ हल करते हुए।



चित्र-6 : विद्यार्थियों ने संख्या रेखा का उपयोग किए बिना इन समस्याओं को हल करने का प्रयास किया।

इसी तरह से विद्यार्थियों ने अपनी पाठ्यपुस्तकों से प्रश्न हल करने का प्रयास भी किया, जो उन्होंने काफ़ी हद तक सही भी किया; इसके अलावा उन्होंने जादुई वर्ग (मैजिक स्क्वायर) को भी सुलझाने का प्रयास किया।

समस्याओं को सुलझाने के दौरान बच्चों ने कुछ बातचीत की और बताया कि वे नियमों का पालन कैसे कर रहे हैं, जैसे कि :

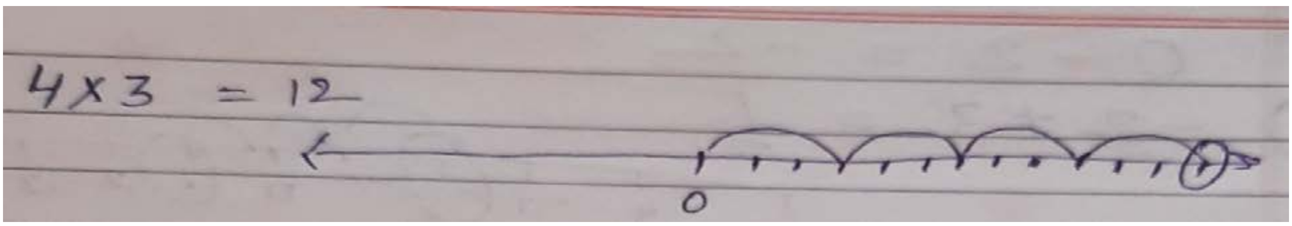
- दिशा बताने के लिए समान चिह्नों वाली संख्याएँ जोड़ी जानी चाहिए क्योंकि वे या तो दाईं ओर बढ़ती हैं या बाईं ओर घटती हैं।
- जब एक प्रश्न, -43 -(- 46), दिया गया तो बच्चे भ्रमित हो गए – यहाँ दो चिह्न थे। जवाब में, एक बच्चे ने उत्तर दिया, "एक - (माइनस) का अर्थ है पीछे की ओर जाना, दूसरे - (माइनस) का अर्थ है 'विलोम', इसलिए इस तथ्य पर विचार करते हुए कि पीछे का विलोम आगे है, हम आगे बढ़ेंगे।"

पूर्णांकों का गुणा

इसके बाद, हम संख्याओं को लाँघने से जुड़े सवालों को लेकर आगे बढ़े।

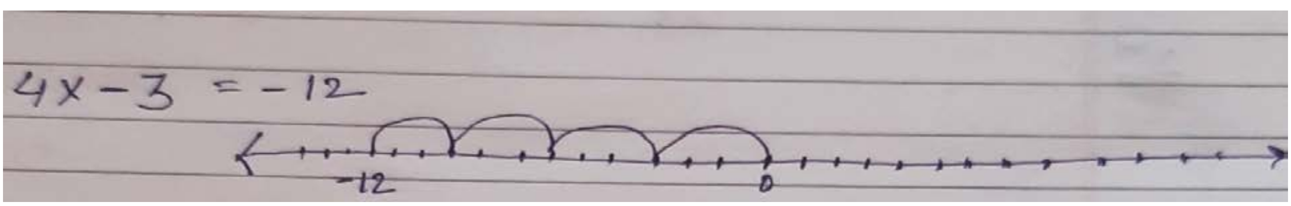
पूर्णांकों के गुणा पर बच्चों के साथ काम करते समय, मैंने निम्नलिखित प्रकार प्रश्न सोचे :

4×3



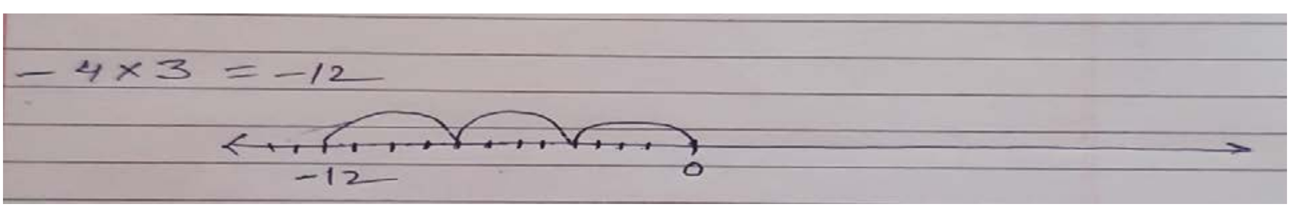
चित्र-7 : यहाँ संख्या रेखा पर स्पष्ट था कि व्यक्ति को धनात्मक दिशा में 4 घर 3 बार लाँघने होंगे।

4×-3



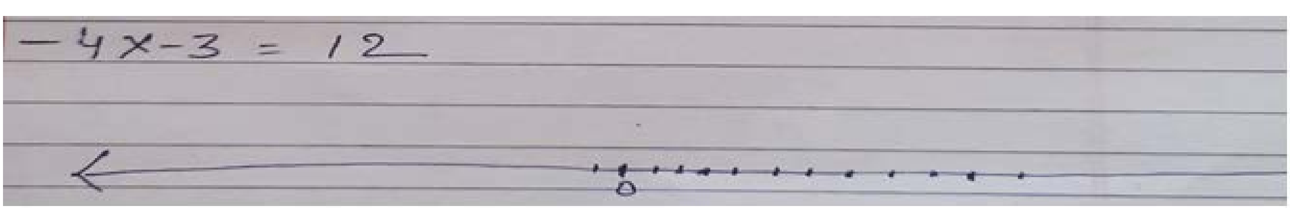
चित्र-8 : यहाँ व्यक्ति को ऋणात्मक दिशा में 4 बार, तीन घर लाँघने हैं।

-4×3



चित्र-9 : इसमें व्यक्ति को ऋणात्मक दिशा में तीन बार 4 घर की छलाँग लगानी है।

-4×-3



चित्र-10 : यहाँ मैंने बताया कि 4 छलाँगें लगानी हैं जिनमें से प्रत्येक में 3 घरों को ऋणात्मक दिशा में लाँघना है। लेकिन चूँकि 4 के आगे ऋणात्मक चिह्न है, तो इसका अर्थ यह है कि जो संकेत दिया जा रहा है, उसके विपरीत छलाँग लगानी है। हमें ऋणात्मक की ओर छलाँग लगाने की बजाय धनात्मक की ओर छलाँग लगानी होगी, इस प्रकार, उत्तर होगा: -4×-3 = 12.

संख्याओं को लाँघना

जब हम इस पर चर्चा कर रहे थे, तो मुझे एहसास हुआ कि संख्याओं को लाँघने की तरह ही पिछली कक्षाओं में, विद्यार्थियों को बार-बार जोड़ने के विचार में, पहले से ही महारत हासिल थी। क्या हम विद्यार्थियों को इसे बेहतर ढंग से समझने में मदद करने के लिए बार-बार जोड़ने की अवधारणा का उपयोग कर सकते हैं?

ऐसा करने के लिए, मैंने पासों के साथ एक गतिविधि की योजना बनाई। मैं इसे यहाँ साझा कर रहा हूँ। संख्याओं को लाँघने की प्रक्रिया को पासे से समझाना बेहतर है या संख्या रेखा से समझाना, इस पर अन्य शिक्षकों के विचार जानने से बहुत मदद मिलेगी?

जब गुणक ऋणात्मक होता है, तो 'इसे उतनी बार दोहराना' यह कहना सम्भव नहीं होता है, इसलिए हम अपनी गतिविधि में इसकी व्याख्या इस प्रकार करते हैं :

जब गुणक ऋणात्मक हो, तो गुणक के बराबर काउंटर को गुणक के मान में दी गई संख्या में गुणा करें, फिर गुणक के ऋणात्मक चिह्न के कारण सभी परिणामी काउंटरों को उल्टा कर दें।

उदाहरण के लिए, 4 (-3) = -12

इसलिए, यदि 4 हरे (धनात्मक) पासे 3 बार लिए जाते हैं और 3 पर ऋणात्मक चिह्न होता है, तो सभी पासों को पलट दिया जाता है, जिससे वे सभी लाल हो जाते हैं और परिणाम -12 होता है।

इसी प्रकार, -4 x (-3) = 12 के उदाहरण में भी यही प्रक्रिया अपनानी होगी।

हमने सीखा

यदि कक्षा में पूर्णांक पढ़ाते समय निम्नलिखित बातों का ध्यान रखा जाए तो विद्यार्थी समझ के साथ आगे बढ़ते हैं और उनका अवधारणात्मक ज्ञान भी बेहतर होता है।

- उच्च प्राथमिक कक्षाओं में उपयोग किए जाने वाले सन्दर्भों पर काफ़ी विचार किया जाना चाहिए, ताकि यह सुनिश्चित किया जा सके कि इस स्तर पर निर्धारित सन्दर्भ भविष्य में विद्यार्थियों के सीखने में बाधा उत्पन्न न करें। हमें इस बात पर भी विचार करना चाहिए कि उपयोग किए गए उदाहरण और उनके द्वारा प्रदान की गई समझ का अमूर्तिकरण की प्रक्रिया पर कैसा प्रभाव पड़ेगा। ये अमूर्तिकरण की प्रक्रिया को बढ़ावा देंगे या उसे धीमा कर देंगे। उदाहरण के लिए, जब विद्यार्थियों को पहली बार संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं, प्राकृत संख्याओं और पूर्णांकों से परिचित कराया गया, तो वे केवल 0 को पूर्ण संख्या और सभी ऋणात्मक संख्याओं को पूर्णांक मान रहे थे। बाद में, मैंने इसे स्पष्ट करने के लिए विभिन्न सन्दर्भों का उपयोग किया और इन संख्याओं की अलग-अलग तरीक़ों से पहचान कराई गई। ऐसे और भी सवालों पर शुरुआत में चर्चा होनी चाहिए ताकि बच्चों में उनसे जुड़ी अवधारणों की समझ विकसित हो सके।
- पैटर्न का प्रदर्शन करके, शिक्षकों को सामान्यीकरण से नियम बनाने की दिशा में आगे बढ़ना चाहिए। विद्यार्थियों को अपने स्वयं के प्रश्न विकसित करने चाहिए और उनके पीछे के तर्क को समझना चाहिए। उदाहरण के लिए, जब बच्चे पूर्णांक-सम्बन्धी सवाल हल कर रहे थे, तो उन्होंने प्रत्येक स्थिति में क्या क़दम उठाना है, इसका पैटर्न स्वयं समझ लिया। उदाहरण के लिए, एक विद्यार्थी ने कहा कि वे सभी ऋणात्मक संख्याओं और धनात्मक संख्याओं को अलग-अलग जोड़ सकते हैं और फिर इन दोनों के योग में घटाव की संक्रिया का उपयोग कर सकते हैं। उसी चिह्न के लिए, एक अन्य विद्यार्थी ने देखा कि 'यह फिर से धनात्मक दिशा में जा रहा है', यानी ऋणात्मक संख्याओं का गुणा धनात्मक होता है। इस तरह बच्चे स्वयं ही निष्कर्ष पर पहुँचने लगे।



राहुल सिंह राठौड़ राजस्थान के सिरोही स्थित अज़ीम प्रेमजी स्कूल में पढ़ाते हैं। इससे पहले, उन्होंने कई सरकारी और निजी स्कूलों में शिक्षण किया है और उनके पास 15 वर्षों का शिक्षण अनुभव है। उन्होंने गणित में एमएससी, बीएड और कम्प्यूटर एप्लीकेशन में पोस्ट ग्रेजुएट डिप्लोमा (पीजीडीसीए) किया है। उनसे *rahul.rathor@azimpremjifoundation.org* पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवादक : यशोधरा कनेरिया **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय